

LA CATÉGORIE DES ESPACES $\mathcal{B}$ -INDUCTIFS SEMI-RÉFLEXIFS

Dumitru Botnaru

L'Université d'Etat de Tiraspol, Chisinau, Moldova, Department of Mathematics

dumitru.botnaru@gmail.com

Abstract It is demonstrated that the $\mathcal{B}$ -inductive semi-reflexive spaces forms a S -semi-reflexive subcategory.

Mots clés: sous-catégories réflexives, coréflexives, $\mathcal{L}$ -semi-réflexives sous-catégories, espaces inductifs semi-réflexifs.

2020 MSC: 18F60, 18G99.

1. INTRODUCTION

Notons avec $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ la catégorie des espaces localement convexes topologiques vectoriels Hausdorff (voir [6]). Nous utiliserons les notations suivantes.

Structures de factorisation:

$(\mathcal{E}p_i, \mathcal{M}_f) = (\text{la classe des épimorphismes, la classe des noyaux}) = (\text{la classe des morphismes à image dense, les inclusions topologiques à image fermée});$

$(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p) = (\text{la classe des épimorphismes universels, la classe des monomorphismes précis}) = (\text{la classe des morphismes surjectifs, la classe des inclusions topologiques});$

$(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u) = (\text{la classe des épimorphismes précis, la classe des monomorphismes universels})$ (voir [2]);

Sous-catégories coréflexives, réflexives et leurs foncteurs:

$\tilde{\mathcal{M}}$ = des espaces avec la topologie Mackey, $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$;

$\mathcal{S}$ = des espaces avec la topologie faible, $s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}$;

$\mathcal{S}h$ = des espaces Schwartz, $s_h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}h$;

$i\mathcal{R}$ = des espaces inductifs semi-réflexifs [1], $i_r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow i\mathcal{R}$;

$s\mathcal{R}$ = des espaces semi-réflexifs, $r_s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow s\mathcal{R}$;

Γ_0 = des espaces complets, $g_0 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \Gamma_0$;

$l\Gamma_0$ = des espaces localement complets [5];

$q\Gamma_0$ = des espaces quasicomplets.

1.1. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux classes de morphismes. Alors:

1. $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \{a \cdot b | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B} \text{ et la composition } a \cdot b \text{ existe}\}.$
2. La classe $\mathcal{A}$ se nomme $\mathcal{B}$ -héréditaire, si $f \cdot g \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{B}$, alors $g \in \mathcal{A}$.

LEMME ([2], Lemme 2.6). *La classe $\mathcal{E}pi$ est $\mathcal{M}_u$ -héréditaire.*

2⁰. La classe $\mathcal{A}$ se nomme $\mathcal{B}$ -cohérente, si $f \cdot g \in \mathcal{A}$ et $g \in \mathcal{B}$, alors $f \in \mathcal{A}$.

3. $\mathcal{A}^\top$ est la classe de tous les morphismes orthogonaux du dessus pour tout morphisme de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}^\top = \mathcal{A}^\top \cap \mathcal{E}pi$ (voir [2]).

3⁰. $\mathcal{A}^\perp$ est la classe de tous les morphismes orthogonaux du bas pour tout morphisme de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{Mono}$.

1.2. Pour $\mathcal{M}$, classe de monomorphismes, et $\mathcal{A}$, classe d'objets (une sous-catégorie), notons par $\mathbf{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de tous les $\mathcal{M}$ -sous-objets des objets de $\mathcal{A}$, et par $P(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de tout produit des objets de $\mathcal{A}$.

Notation duale: $\mathbf{Q}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$, où $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$.

1.3. Couples de sous-catégories conjuguées, sous-catégories c -coréfectives et c -réfectives (voir [3]).

Soit $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{K}$ et $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L}$ un foncteur coréfecteur et un foncteur réfecteur.

Notons $\mu\mathcal{K} = \{m \in \mathcal{Mono} \mid k(m) \in \mathcal{Iso}\}$, $\varepsilon\mathcal{L} = \{e \in \mathcal{E}pi \mid l(e) \in \mathcal{Iso}\}$.

Définition (voir [3]). $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ se nomme un couple de sous-catégories conjuguées de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, si $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$.

Soit $\mathbb{P}_c$ la classe de couples des sous-catégories conjuguées. Chaque composante d'un couple de sous-catégories conjuguées est unique déterminée. $(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S})$ est le plus petit élément, et $(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{C}_2\mathcal{V})$ le plus grand élément de la classe $\mathbb{P}_c$.

Si $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, alors $\mathcal{K}$ se nomme la sous-catégorie c -coréfective, et $\mathcal{L}$ - la sous-catégorie c -réfective. Soit $\mathbb{K}_c$ (respectivement: $\mathbb{R}_c$) la classe des sous-catégories c -coréfectives (respectivement: sous-catégories c -réfectives), et $\mathcal{B}ic = \{\varepsilon\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c\}$.

1.4. La sous-catégorie $\mathcal{S}h$ des espaces Schwartz et la sous-catégorie $u\mathcal{N}$ des espaces ultranucléaires sont des sous-catégories c -réfectives (voir [3]).

1.5. Pour $\mathcal{A}$, une classe d'objets injectifs ($\mathcal{M}_p$ -injectifs), la sous-catégorie $\mathbf{S}_{\mathcal{M}_p}P(\mathcal{A})$ est c -réfective. Ces sous-catégories forment une classe propre de sous-catégories (voir [3]).

1.6. *L'opération $\lambda_{\mathcal{R}}$* (voir [4]). Soit $\mathcal{A}$ une classe d'épimorphismes de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Notons avec $\lambda(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de tous les objets Z à propriété:

Pour tout $p : X \rightarrow Y \in \mathcal{A}$, tout morphisme $f : X \rightarrow Z$ s'éteint par p :

$$f = g \cdot p,$$

pour un g . Si $\mathcal{L}$ est une classe d'objets ou une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, alors notons $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) = \lambda(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} = \{r^X \mid X \in |\mathcal{L}|\}$.

L'opération λ^* est définie duale et $\lambda^*(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} \subset \text{Mono}$, et $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

1.7. Proposition. 1. Pour toute classe d'épimorphismes $\mathcal{A}$, la sous-catégorie $\lambda(\mathcal{A})$ est épiréflexive.

2. Soit $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, et $\mathcal{B} = \mu\mathcal{K}$. Alors $\lambda(\mathcal{B}) = \mathcal{L}$, et $\lambda^*(\mathcal{B}) = \mathcal{K}$.

1.8. Foncteurs commutatifs. On examinera deux foncteurs t_1, t_2 , tous les deux coréfecteurs, tous les deux réflecteurs, ou l'un coréfecteur et l'autre réflecteur. Dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ si $t_1 t_2 A \sim t_2 t_1 A$ pour tout $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, alors on peut facilement vérifier que les foncteurs $t_1 \cdot t_2$ et $t_2 \cdot t_1$ sont isomorphes.

1.9. Sous-catégories semi-réflexives.

Définition (voir [4]). 1. Soit $\mathcal{A}$ une sous-catégorie et $\mathcal{L}$ une sous-catégorie réflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. L'objet X se nomme $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ -semi-réflexif, si sa $\mathcal{L}$ -réplique appartient à la sous-catégorie $\mathcal{A}$. La sous-catégorie pleine de tous les objets $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ -semi-réflexifs se nomme produit semi-réflexif des sous-catégories $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$, notée

$$\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}.$$

2. Soit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ deux sous-catégories réflectives de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. $\mathcal{R}$ se nomme une sous-catégorie $\mathcal{L}$ -semi-réflexive, si elle est fermée par rapport à $(\varepsilon\mathcal{L})$ -sous-objets et $(\varepsilon\mathcal{L})$ -facteur-objets.

La classe de toutes les sous-catégories $\mathcal{L}$ -semi-réflexives est notée $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Alors $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, où $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{R} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{R})\}$ et $\mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{R})\}$.

Théorème [4]. 1. Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Alors: $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$, $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$. Alors $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{T})$.

Les résultats principaux de l'ouvrage.

On affirme que $i\mathcal{R} \subset \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \subset s\mathcal{R}$ (Lemme 3.4) et $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$ est une sous-catégorie $\mathcal{S}$ -semi-réflexive (Théorème 3.5). Le Théorème 3.7 permet de construire $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$ -réplique de tout objet de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. La sous-catégorie des espaces inductifs semi-réflexifs

2.1. Soit (E, t) un espace localement convexe et A un ensemble absolument convexe dans l'espace dual E' . L'espace normé (E'_A, n_A) est défini par l'espace linéaire E'_A de l'ensemble A et le fonctionnel Minkowski n_A de l'ensemble A .

Définition. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles absolument convexes de l'espace E' . La topologie inductive $j(\mathcal{F})$ définie par la famille $\mathcal{F}$ sur l'espace E' est

la plus fine topologie localement convexe pour laquelle les applications $j_A : (E'_A, n_A) \rightarrow (E', j(\mathcal{F}))$ sont continues.

On a examiné divers cas pour la famille $\mathcal{F}$, famille des ensembles absolument convexes et compacts ou précompacts dans les espaces E'_τ et E'_β (E'_τ est l'espace E' avec la topologie Mackey τ , β est la topologie de la convergence uniforme sur tous les ensembles bornés de (E, t)).

2.2. Soit $\mathcal{U}$ une base d'ensembles absolument convexes de la topologie t et $\mathcal{F} = \{U^0, U \in \mathcal{U}\}$, où U^0 est polaire à l'ensemble $U : U^0 = \{f \in E' \mid |f(U)| \leq 1\}$.

Définition [1]. L'espace (E, t) est nommé inductif semi-réflexif, si $(E', j(\mathcal{F}))' = E$.

La sous-catégorie des espaces inductifs semi-réflexifs sera notée par $i\mathcal{R}$.

2.3. Théorème [1]. Un espace localement convexe est inductif semi-réflexif alors et seulement alors quand sa Sh-réplique est un espace complet.

2.4. Remarques. 1. Tenant compte des notations ci-dessus, le résultat mentionné sera écrit

$$i\mathcal{R} = Sh *_{sr} \Gamma_0.$$

2. Ainsi $i\mathcal{R} \in \mathbb{R}_{fg}^s(\varepsilon Sh)$, et

$$i\mathcal{R} = Sh *_{sr} \mathcal{T}$$

pour $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ et $Sh \cap i\mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \lambda_{iR}(Sh)$ ([4], Théorème 4.13).

3. ([4], Théorème 6.4). $i\mathcal{R} = Ch *_d (Sh \cap \Gamma_0)$ où $(Ch, Sh) \in \mathbb{P}_c$.

2.5. Théorèmes. 1. $t^X = u^X \cdot v^X$ est $((\varepsilon Sh)^\top, \varepsilon Sh)$ -factorisation de morphisme t^X .

2. Mentionnons aussi que

$$s\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} q\Gamma_0$$

(voir [6]). De plus,

$$s\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} \mathcal{T}, s\mathcal{R} = \widetilde{\mathcal{M}} *_d (\mathcal{S} \cap q\Gamma_0)$$

pour $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{S} \cap s\mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \lambda_{sR}(\mathcal{S})$ ([4], Théorème 4.13).

3. La sous-catégorie des espaces $\mathcal{B}$ -inductifs semi-réflexifs

3.1. Définition [5]. Un ensemble A absolument convexe dans un espace localement convexe (E, t) est nommé sphère Banach, si (E_A, n_A) est un espace Banach.

3.2. Définition [7]. Soit (E, t) un espace localement convexe et $\mathcal{F}$ la famille de toutes les sphères Banach de E' . L'espace (E, t) est nommé $\mathcal{B}$ -inductif semi-réflexif si $(E', j(\mathcal{F}))' = E$.

La sous-catégorie des espaces $\mathcal{B}$ -inductifs semi-réflexifs sera notée par $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$.

3.3. Soit $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $m^X : mX \rightarrow X$ la $\tilde{\mathcal{M}}$ -coréplique de X et $s_h^{mX} : mX \rightarrow s_h mX$ la Sh -réplique de mX .

Théorème [7]. L'espace localement convexe X est $\mathcal{B}$ -inductif semi-réflexif alors et seulement alors quand $s_h mX$ est complet: $s_h mX \in |\Gamma_0|$.

3.4. Lemme. 1. $i\mathcal{R} \subset \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \subset s\mathcal{R}$.

2. $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{M}} \cap i\mathcal{R})$.

3. $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(i\mathcal{R})$.

Démonstration. 1. L'inclusion $i\mathcal{R} \subset \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$ est mentionnée dans [7].

$\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \subset s\mathcal{R}$. Soit $(E, t) \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$. Alors $E'_\tau = (E', j(\mathcal{F}))$. Donc E'_τ est un espace tonnelé comme limite inductive d'une famille d'espace Banach ([6], cap.II, p.7.1 et 7.2). Alors (E, t) est un espace semi-réflexif ([6], cap.IV, Affirmation 5.5).

2. $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \subset \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{M}} \cap i\mathcal{R})$. Soit $A \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$, $m^A : mA \rightarrow A$ $\tilde{\mathcal{M}}$ -coréplique de A et $s_h^{mA} : mA \rightarrow s_h mA$ Sh -réplique de mA . En vertu du Théorème 3.3 $s_h mA \in |\Gamma_0|$ et en vertu de p. 2.4 $mA \in |i\mathcal{R}|$. Donc $A \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{M}} \cap i\mathcal{R})|$.

$\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{M}} \cap i\mathcal{R}) \subset \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{M}} \cap i\mathcal{R})|$, $m^A : mA \rightarrow A$ $\tilde{\mathcal{M}}$ -coréplique de A . Alors $mA \in |i\mathcal{R}|$. Donc $s_h mA \in |\Gamma_0|$.

3. $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \subset \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(i\mathcal{R})$. Soit $X \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$, et $m^X : mX \rightarrow X$ $\tilde{\mathcal{M}}$ -coréplique de l'objet X . Alors $mX \in |i\mathcal{R}|$ et $m^X \in \mu\tilde{\mathcal{M}} = \varepsilon\mathcal{S}$. Donc $X \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(i\mathcal{R})|$.

$\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(i\mathcal{R}) \subset \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(i\mathcal{R})|$. Alors A est un $(\varepsilon\mathcal{S})$ -facteur-objet d'un objet $X \in |i\mathcal{R}|$: $b : X \rightarrow A \in \varepsilon\mathcal{S}$. Soit $m^X : mX \rightarrow X$ $\tilde{\mathcal{M}}$ -coréplique de l'objet X . Alors $b \cdot m^X : mX \rightarrow A$ et $\tilde{\mathcal{M}}$ -coréplique de l'objet A .

Soit encore que $s_h^{mX} : mX \rightarrow s_h mX$ et $s_h^A : X \rightarrow s_h X$ Sh -répliques des objets respectifs. Alors

$$s_h^X \cdot m^X = s_h(m^X) \cdot s_h^{mX}, \quad (1)$$

où s_h^X , s_h^{mX} et m^X appartiennent à la classe $\varepsilon\mathcal{S} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Donc $s_h(m^X) \in \varepsilon\mathcal{S}$ aussi.

Puisque $X \in |i\mathcal{R}|$, il résulte que $s_h X \in |\Gamma_0|$. Alors $s_h mX \in |\Gamma_0|$ aussi, puisque $s_h(m^X) \in \varepsilon\mathcal{S}$. Ainsi on a démontré que $s_h mA \in |\Gamma_0|$ et $A \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$. $\square$

$$\begin{array}{ccc}
mA = mX & \xrightarrow{s_h^{mX}} & s_h mX = s_h mA \\
\downarrow m^X & & \downarrow s_h(m^X) \\
X & \xrightarrow{s_h^X} & s_h X \\
\searrow b & & \\
& A &
\end{array}$$

3.5. Théorème. $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$.

Démonstration. Vérifions que $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Il en suffit de démontrer que la sous-catégorie $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$ est fermée par rapport avec les produits et les sous-espaces fermés - $\mathcal{M}_f$ -sous-objets.

Soit $\{X_i, i \in \mathbb{I}\}$ une famille d'objets de la sous-catégorie $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$, on a

$$s_h m \Pi X_i = s_h \Pi m X_i$$

puisque le foncteur coréfecteur $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ commute avec les produits ([6], cap. IV, Théorème 4.3). Puisque $S \subset Sh$, le foncteur $s_h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow Sh$ commute avec les produits, (voire [3], Exemple 3.9). Donc

$$s_h \Pi m X_i = \Pi s_h m X_i \text{ et } s_h m \Pi X_i \in |\Gamma_0|.$$

Vérifions que la sous-catégorie $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$ est fermée par rapport aux les sous-espaces fermés - $\mathcal{M}_f$ -sous-objets. Soit $A \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$ et $i : X \rightarrow A \in \mathcal{M}_f$. Examinons le diagramme suivant commutatif formé de $\tilde{\mathcal{M}}$ -coréplique et Sh -réplique des objets respectifs.

$$i \cdot m^X = m^A \cdot m(i), \quad (1)$$

$$s_h(i) \cdot s_h^X = s_h^A \cdot i, \quad (2)$$

$$s_h m(i) \cdot s_h^{mX} = s_h^{mA} \cdot m(i), \quad (3)$$

$$s_h^X \cdot m^X = s_h(m^X) \cdot s_h^{mX}, \quad (4)$$

$$s_h^A \cdot m^A = s_h(m^A) \cdot s_h^{mA}, \quad (5)$$

$$s_h(i) \cdot s_h(m^X) = s_h(m^A) \cdot s_h m(i). \quad (6)$$

De plus

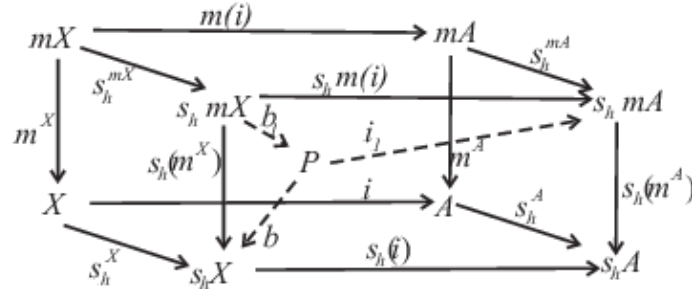
$$s_h(i) \cdot b = s_h(m^A) \cdot i_1 \quad (7)$$

est le carré cartésien construit sur les morphismes $s_h(i)$ et $s_h(m^A)$. Alors, de l'égalité (6), on déduit que

$$s_h(m^X) = b \cdot b_1, \quad (8)$$

$$s_h m(i) = i_1 \cdot b_1. \quad (9)$$

pour un morphisme b_1 .



$\tilde{\mathcal{M}}$ est une sous-catégorie $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$ -coréfective et $\mathcal{Sh}$ est une sous-catégorie $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$ -réfective. De plus, la classe $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$ est $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$ -héréditaire et $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$ -cohérentaire. Ainsi, dans les égalités (4) et (5), tous les morphismes appartiennent à la classe $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Puisque $s_h(m^A) \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$, il résulte que $b \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. De l'égalité (8), on déduit que $b_1 \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$ aussi.

La sous-catégorie $\mathcal{Sh}$ est c -réfective (voir [3]). Une sous-catégorie $\mathcal{R}$ est c -réfective si et seulement si $\mathcal{R}$ est $\mathcal{E}_u$ -réfective et le foncteur $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}$ est exactement à gauche: $r(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{M}_f$ ([3], Théorème 2.7).

Ainsi $s_h(i) \in \mathcal{M}_f$. Donc $i_1 \in \mathcal{M}_f$ aussi, et P , comme sous-espace fermé de l'espace complet $s_h mA$, est complet. Puisque s_h^{mX} est une application bijective et $b_1 \in \mathcal{M}_u$, les topologies des espaces mX et $s_h mX$ sont compatibles avec la même dualité. Donc $s_h mX \in |\Gamma_0|$.

$\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{S})$. Résulte du Lemme 3.4 p.2.

$\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$. Soit $A \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$, $b : X \rightarrow A \in \varepsilon\mathcal{S} = \mu\tilde{\mathcal{M}}$ et $m^X : mX \rightarrow X$ $\tilde{\mathcal{M}}$ -coréplique de X . Donc $b \cdot m^X : mX \rightarrow A$ est $\tilde{\mathcal{M}}$ -coréplique de A et $mX \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$. Alors $X \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$. $\square$

3.6. Mentionnons que $i\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{Sh})$ et $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}, s\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$. Dans l'ouvrage [7], on affirme que les sous-catégories des espaces inductifs semi-réflexifs et $\mathcal{B}$ -inductifs semi-réflexifs ne coïncident pas. Soit (E, t) un espace réflexif normé infini dimensionnel. On affirme que $(E, \sigma(E, E'))$ est $\mathcal{B}$ -inductif semi-réflexif, mais il n'est pas inductif semi-réflexif.

3.7. Théorème. 1. $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} = \mathcal{Ch} *_d (\mathcal{Sh} \cap \mathcal{U})$, où $\mathcal{U} = \mathcal{Sh} \vee \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ est le suprême des sous-catégories $\mathcal{Sh}$ et $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$ dans la latice $\mathbb{R}$.

2. $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} = Sh *_{sr} \mathcal{T}$, pour tout $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{S} \cap \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \lambda_{\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}}(Sh)$.
3. $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \subset Sh *_{sr} l\Gamma_0$.

Démonstration. 1. Le Théorème 6.4 [4] indique une méthode qui permet de construire $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$ -réplique de tout objet de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. Voir [4] Théorème 4.19.

3. Soit $A \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$ et on va démontrer que Sh -réplique $s_h A$ appartient à la catégorie $l\Gamma_0$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 mA & \xrightarrow{s_h^{mA}} & s_h mA \\
 m^A \downarrow & & \downarrow s_h(m^A) \\
 A & \xrightarrow{s_h^A} & s_h A
 \end{array}$$

dans lequel tous les morphismes appartiennent à la classe $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u = \varepsilon\mathcal{S}$. De plus, $s_h mA \in |\Gamma_0|$. Ainsi, $s_h A \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\Gamma_0)| = |l\Gamma_0|$. $\square$

3.8. Soit $\mathcal{Ch}$ la conjuguée de la sous-catégorie $Sh : (\mathcal{Ch}, Sh) \in \mathbb{P}_c$. Examinons les foncteurs respectifs:

$$\begin{aligned}
 c_h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{Ch}, s_h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow Sh, i_r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow i\mathcal{R}, \\
 b_r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}, m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}, s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}.
 \end{aligned}$$

Théorème. 1. Soit $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_c$ et $\mathcal{Ch} \subset \mathcal{T}$. Alors les foncteurs $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}$ et i_r commutent: $t \cdot i_r = i_r \cdot t$.

2. Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ et $\mathcal{L} \subset Sh$. Alors les foncteurs $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L}$ et i_r commutent: $l \cdot i_r = i_r \cdot l$.

3. Soit $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_c$. Alors les foncteurs $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}$ et b_r commutent: $t \cdot b_r = b_r \cdot t$.

Démonstration. Les affirmations 1 et 3 résultent du Théorème 5.2, et les affirmations 2 et 4 résultent du Corollaire 5.5 [4]. $\square$

References

- [1] Berezanskii Yu.A., *Inductivno refleksivnye lokal'no vyruklye prostranstva*, Soviet Math.Dokl, 9 (1968), 1080-1082 (en russe).
- [2] Botnaru D., *Structures bicatégorielles complémentaires*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., LV(2010), 2, 97-119.
- [3] Botnaru D., *Couples des sous-catégories conjuguées*, ROMAI J. 14(2018), 1, 23-41.
- [4] Botnaru D., *Noyaux des sous-catégories semi-réflexives*, ROMAI J. 14(2018), 2, 1-32.

- [5] Raïcov D.A., *Loi exponentielle pour espaces des applications linéaires continues*, Mat. sb., 7(109), (1965), 2, 279-302 (en russe).
- [6] Schaefer H.H., *Topological vector spaces*, Macmillan company, New York, Collier-Macmilan Limited, London, 1966.
- [7] Sekevanov V.S., *Espaces localement convexes $\mathcal{B}$ -inductifs réflexifs*, Func. an., Meybouzz. sb., Oulianovsk, 14(1980), 128-131 (en russe).